**5-Дәріс**

<u>**Тақырыбы:**</u> **Коши және Гейне бойынша функцияның шегі. Функция шегінің қасиеттері. Функция шегі бар болуының Коши критерийі. Біржақты шектер. Монотонды функцияның шегі.**

**Анықтама.** $a$ нүктесі X жиынының шектік нүктесі деп айтылады, егер $x_n \in X$, $x_n \to a$, $n \to \infty$ шарттары орындалатын тізбегі табылса.

$f$ функциясы X жиынында анықталып, $a$ нақты саны сол жиынның шектік нүктесі болсын.

**Анықтама (функция шегінің «$\varepsilon - \delta$» тіліндегі анықтамасы).** *Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $f$ функциясының анықталу жиынында жататын және*

$$0 < |x - a| < \delta$$

*теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x сандары үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын $\delta(\varepsilon) > 0$* ***саны табылса,*** *онда $f(x)$ функциясының x $a$-ға ұмтылғанда* ***нақты мәнді шегі бар,*** *және ол* ***А санына тең*** *дейді де*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A; \quad f(x) \to A \ \ (x \to a);$$

*символдарымен белгілейді.*

Берілген анықтамадан $f$ функциясы $a$ нүктесінде анықталған ба, жоқ па, $f$ функциясының $a$ нүктесіндегі шегіне ешқандай әсер етпейтінін көреміз.

**Анықтама.** *Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін*

$$a < x < a + \delta \qquad (a - \delta < x < a), x \in X$$

*теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x үшін*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

*теңсіздігі орындалатындай $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылса, онда A саны $f(x)$ функциясының $a$ нүктесіндегі* ***оң жақты (сол жақты) шегі*** *деп аталады да*

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A; \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = A, \ f(a+0) = A,$$

$$\left( \lim_{x \to a-0} f(x) = A, \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = A, f(a-0) = A \right)$$ *символдарының бірімен белгіленеді.*

**Теорема**. $f$ функциясының $a$ нүктесінде шегі бар болуы $\lim_{x \to a+0} f(x)$ пен $\lim_{x \to a-0} f(x)$ шектері бар және олардың өзара тең болуы қажетті және жеткілікті.

Егер $\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = A$ онда $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

**Анықтама** (функцияның шегінің «тізбектер» тіліндегі анықтамасы). *Егер $\forall n \in N$, $x_n \ne a$ шартын қанағаттандыратын, $a$ санына жинақталатын* ***әрбір***

$\{x_n\} \subset D(f)$ ***тізбегіне*** *сәйкес келетін* $\{f(x_n)\}$ *тізбегінің шегі бар және ол* $A$ *санына тең болса, онда* $A$ *саны* $f$ *функциясының* $a$ *нүктесіндегі шегі деп аталады, да*

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A, \text{ немесе } f(x_n) \to A \quad (x_n \to a)$$

символдарымен белгілейді.

**Функциялардың шектері жөніндегі негізгі теоремалар.**

**Теорема 1.** $x \to a$-ға ұмтылғанда $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының нақты мәнді шектері бар болсын, яғни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$ теңдіктері орындалсын, онда:

1) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A + B$.

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A - B$.

3) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A \cdot B$.

**Теорема 2.** $x \to a$-ға ұмтылғанда $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының нақты мәнді шектері бар болсын. Яғни $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$ теңдіктері орындалсын, егер $B \neq 0$ болса, онда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)} = \frac{A}{B};$$

(бұл теоремалар $a = \pm\infty$ болғанда да орындалады).

Егер осы теоремалардың шарттары орындалмаса, онда $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ түріндегі анықталмаған өрнектер пайда болады. Онда берілген функциясының шегі жоқ әлде бар ма, бар болса мәні қандай болатынын алдын ала білуге болмайды, оны анықтау керек болады. Осы мәселе анықталмағандықты ашу деп аталады.